NÁZOV: **TENZOR NAPÄTIA**

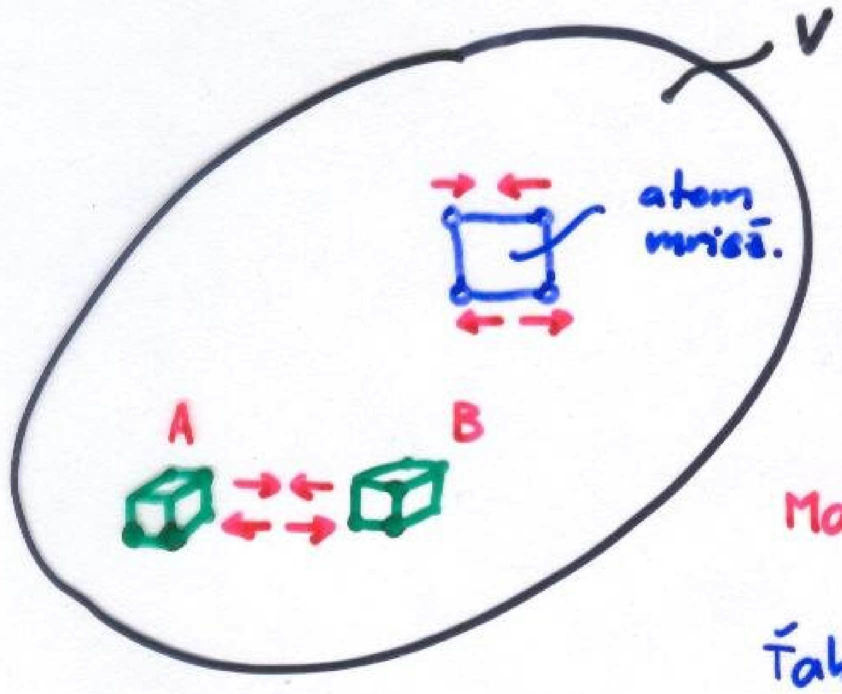
PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 1

ČÍSLO ZLOŽKY

① KONCEPT NAPÄTIA



Kontinuum v silovom poli

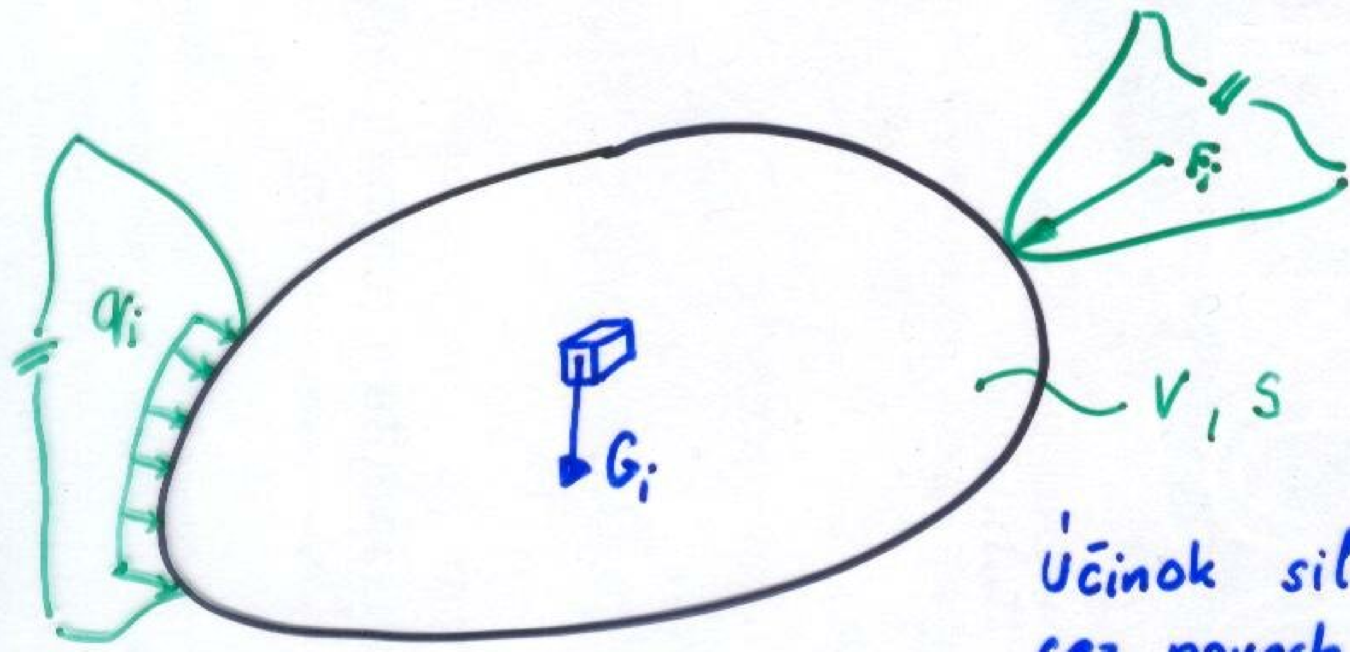
Mikroskopický prístup: príťažlivé a odpudivé sily

Makroskopický prístup:

Ťahy a tlaky medzi hmotnými bodmi telesa => napätia

Pojem napätia zaviedol Cauchy (Euler)

② OBJEMOVÉ A PLOŠNÉ SILY



Účinok silového pôsobenia cez povrch a objem sa prenáša do kontinua

NÁZOV: T. N

PREDMET: MK

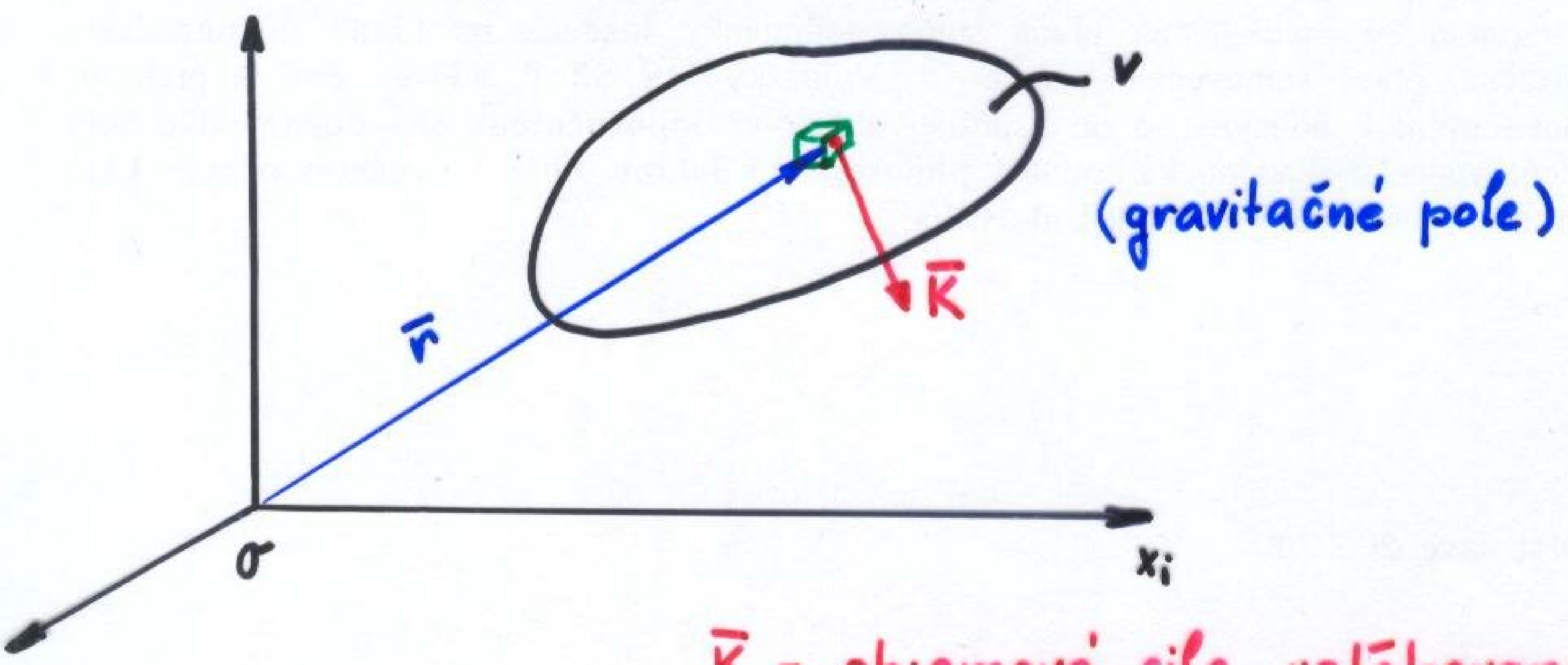
ROČNÍK:

ČÍSLO: 2

ČÍSLO ZLOŽKY

Sily pôsobiace na kontinuum: - objemové $= f(V)$
- plošné $= f(S)$

OBJEMOVÉ SILY:



$\bar{K}$ - objemová sila vzťahovaná na jednotku objemu

$$\bar{K} \equiv [N/m^3]$$

$$K_i = [K_1, K_2, K_3]$$

Výsledná objemová sila:

$$\bar{G} = \int_V \bar{K}\, dV \quad [N] \qquad G_i = \int_V K_i\, dV$$

Moment objemových síl k počiatku KSS:

$$\bar{M}_G = \bar{r} \times \bar{G} = \bar{r} \times \int_V \bar{K}\, dV = \int_V \bar{r} \times \bar{K}\, dV$$

$K_i \Rightarrow$ vonkajšie sily !!

$$M_i^G = \int_V e_{ijk}\, r_j\, K_k\, dV$$

NÁZOV: T. N

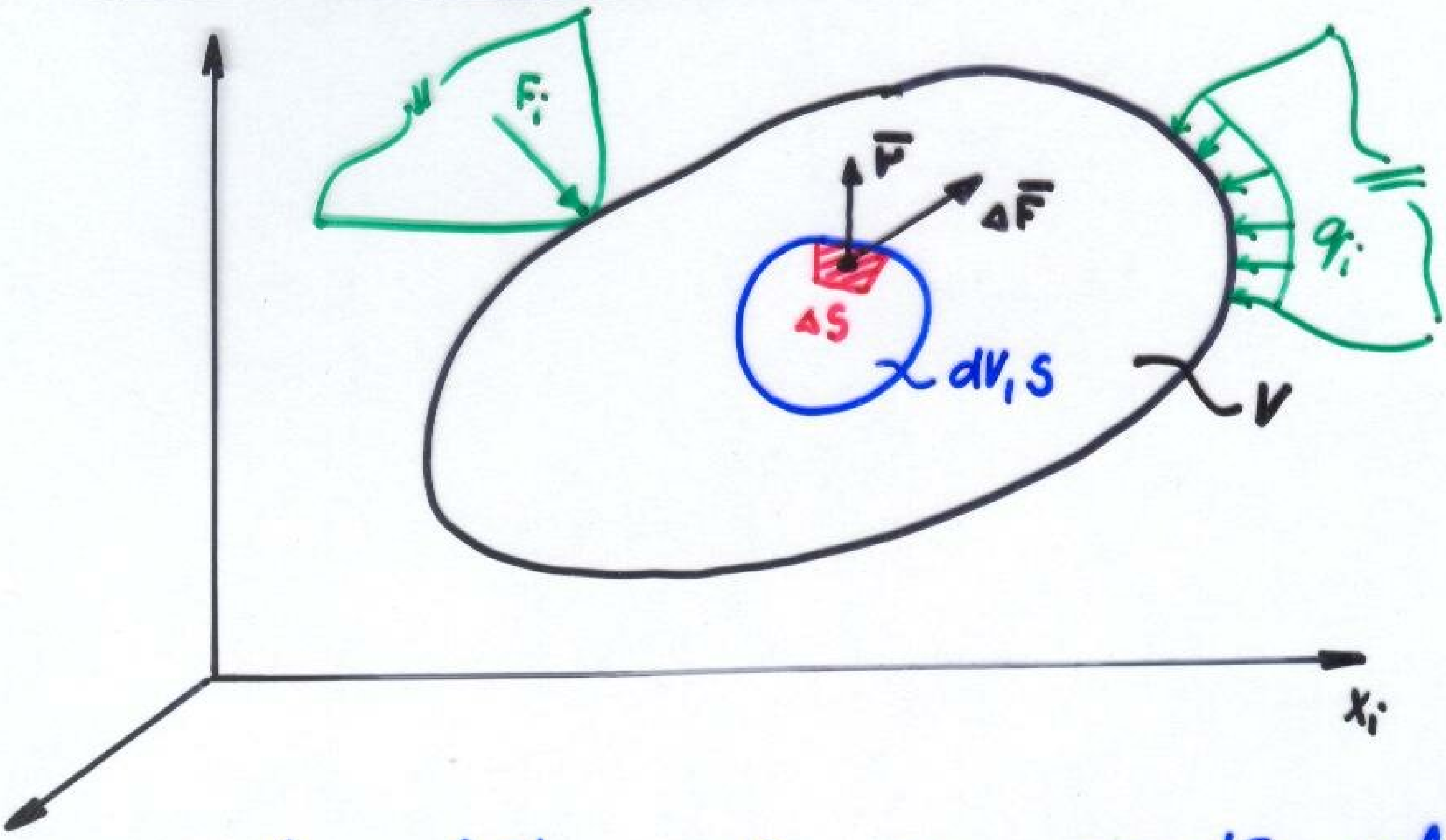
PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 3

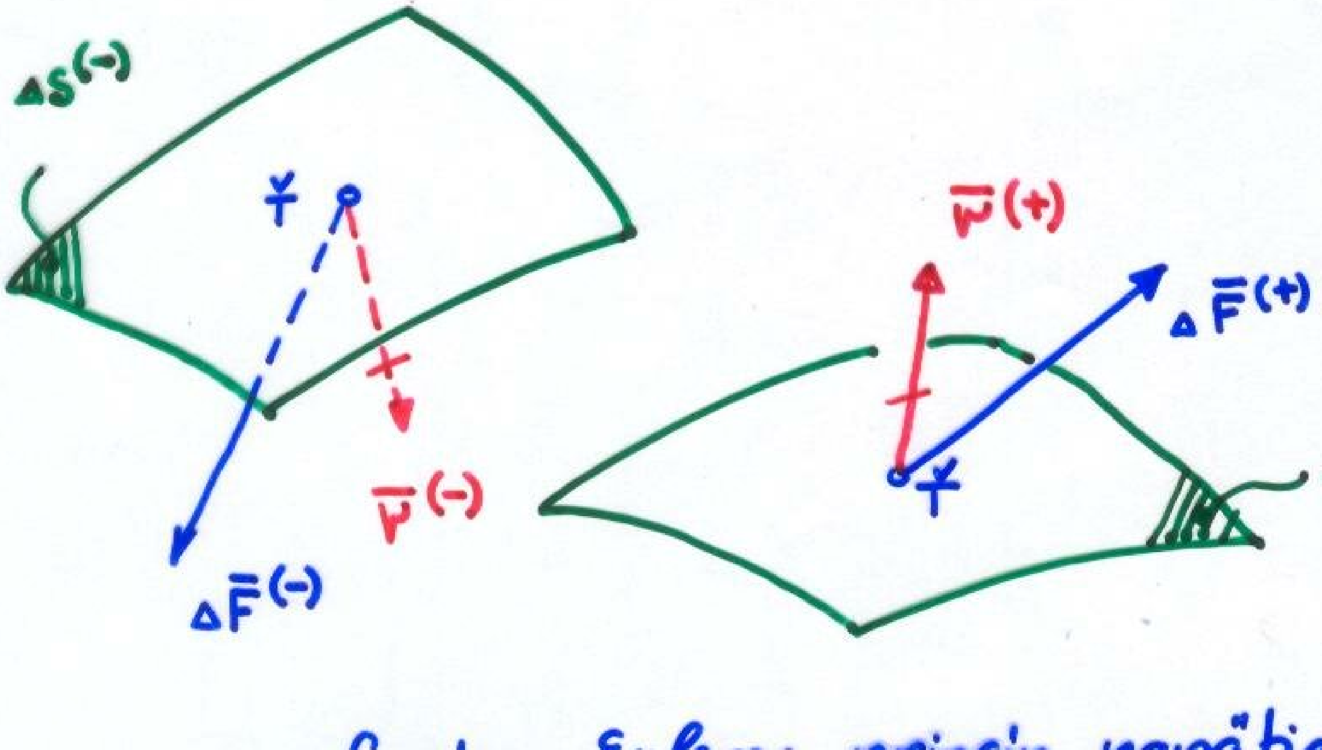
ČÍSLO ZLOŽKY

PLOŠNÉ (povrchové) SILY :



Cez plošku ΔS sa prenáša vplyv plošných (povrchových) síl do vybraného elementu

Na základe akcie a reakcie je silový účinok cez plošku ΔS „ekvipolentný"



Cauchy – Eulerov princíp napätia $\Delta \overline{F}^{(+)} = -\Delta \overline{F}^{(-)}$

NÁZOV: T. N

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 4

ČÍSLO ZLOŽKY

Vektor napätia:

$$\overset{\nu}{\bar{T}} = \lim_{\Delta S \to \emptyset} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta S} = \frac{d\bar{F}}{dS} \quad \left[N/m^2 \right] = 1 \text{ Pascal [Pa]}$$

$1 MPa = 10^6 Pa$

$1 MPa \to \frac{1N}{mm^2}$

⇒ normalové a šmykové napätie

Výsledná plošná sila na povrchu S:

$$\bar{F} = \int_S \overset{\nu}{\bar{T}} . dS \qquad F_i = \int_S \overset{\nu}{T_i} \, dS$$

Moment plošných sil:

$$\bar{M}^F = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{r} \times \int_S \overset{\nu}{\bar{T}} . dS = \int_S \bar{r} \times \overset{\nu}{\bar{T}} \, dS$$

V zložkovom tvare:

$$M_i^F = \int_S e_{ijk} \, r_j \, \overset{\nu}{T_k} \, dS$$

Vzťah medzi silami určíme neskôr!

NÁZOV: T. N

PREDMET: MK

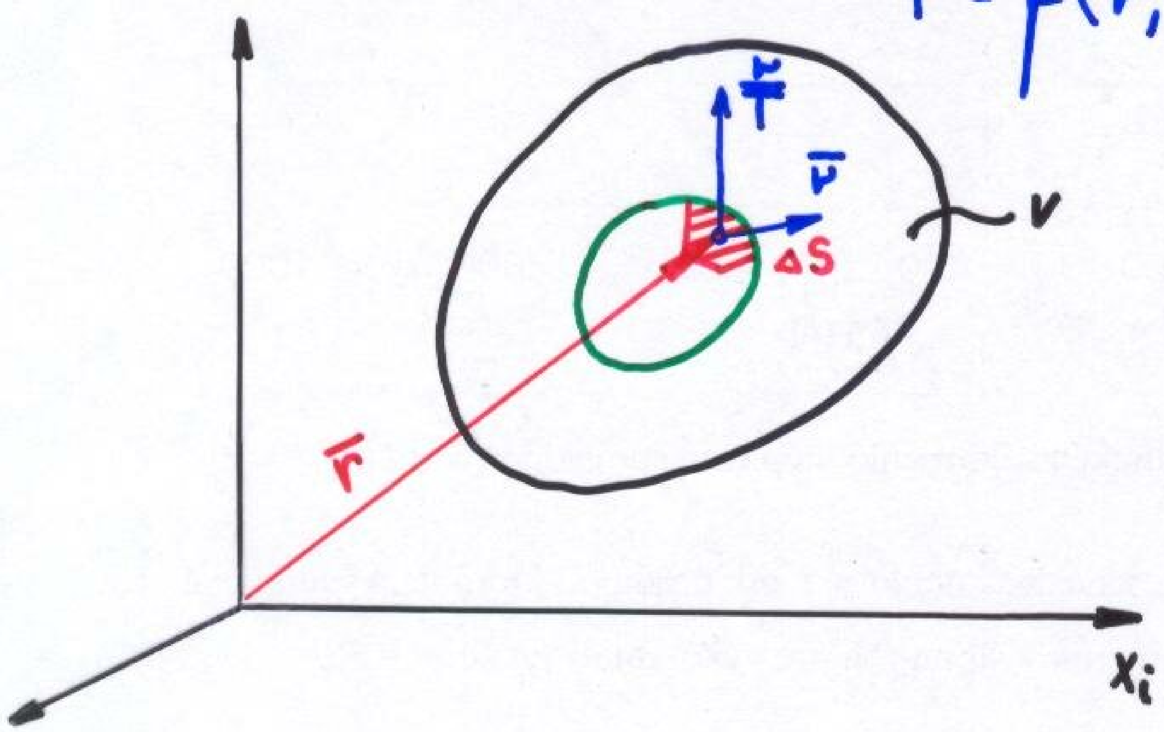
ROČNÍK:

ČÍSLO: 5

ČÍSLO ZLOŽKY

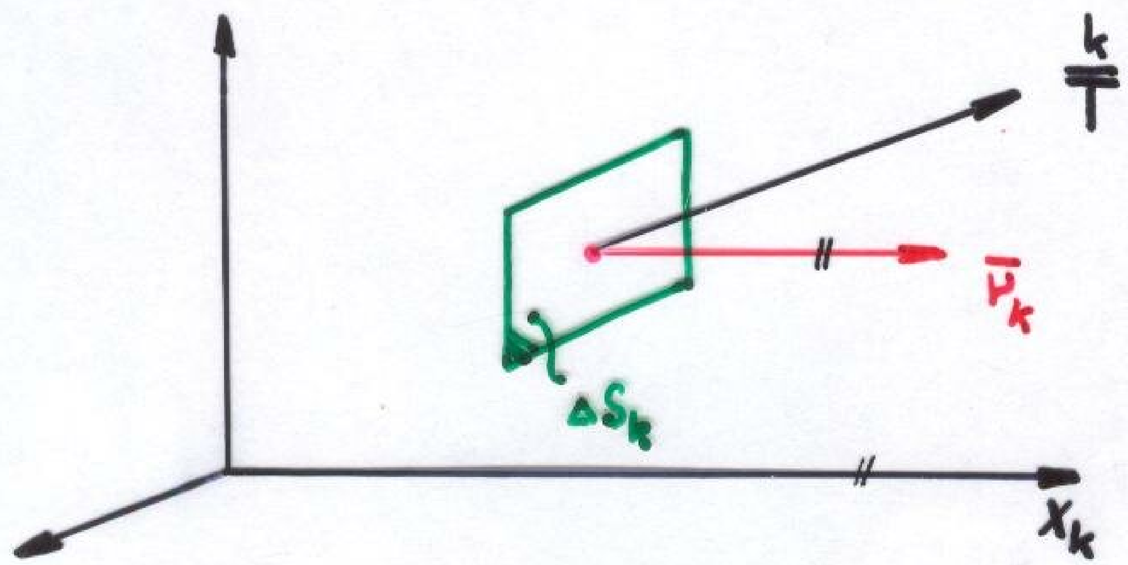
OZNAČOVANIE ZLOŽIEK NAPÄTIA

Úloha: Vektor napätia na elementárnej ploške je funkciou: $\overset{\nu}{T} = f(\bar{\nu}, \Delta S, \bar{r})$



Určíme vektory napätia v špeciálnych rovinách, ktorých vonkajšie normály sú v smere súradnicových osí.

Nech $\bar{\nu} = \bar{\nu}_k \equiv x_k$, $k = 1, 2, 3$



NÁZOV: T. N

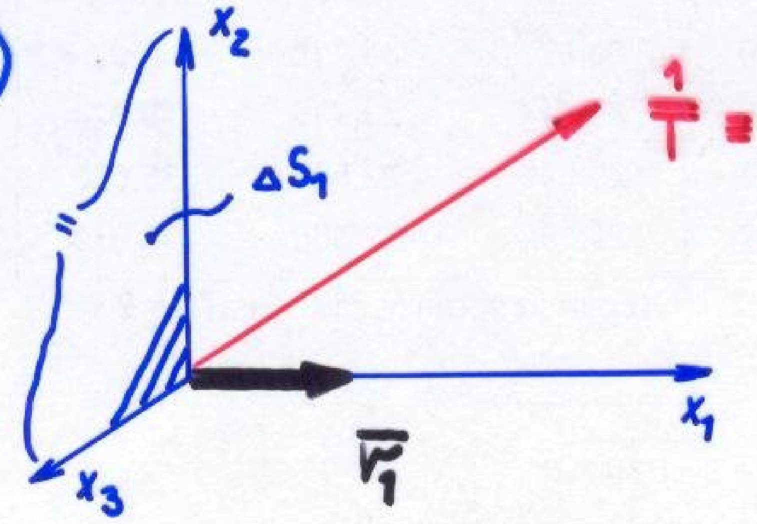
PREDMET: AM

ROČNÍK:

ČÍSLO: 6

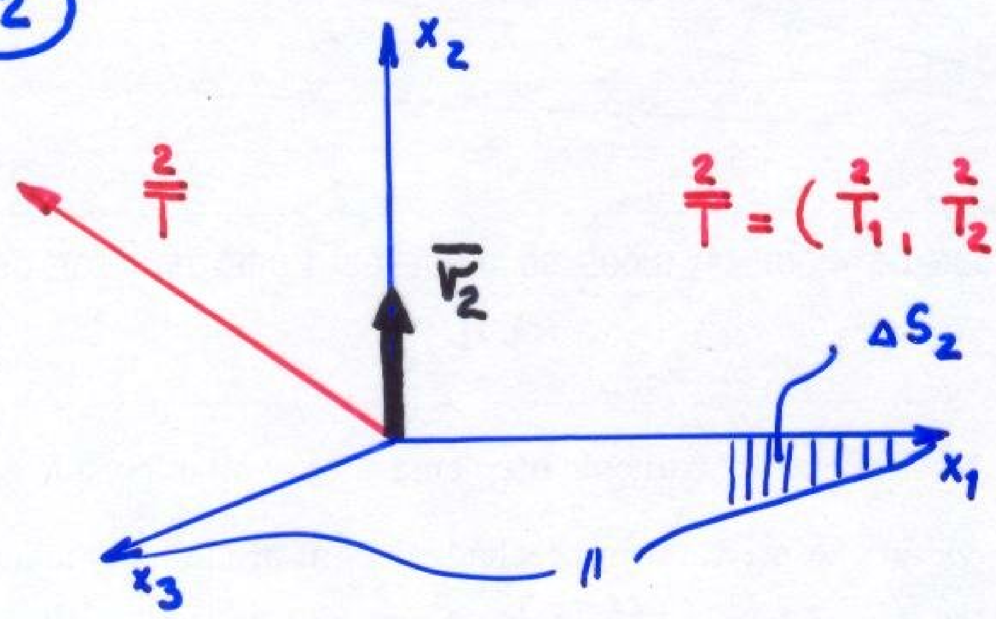
ČÍSLO ZLOŽKY

k = 1



$$\overset{1}{T} = (\overset{1}{T}_1, \overset{1}{T}_2, \overset{1}{T}_3) \equiv \overset{1}{T}_i$$

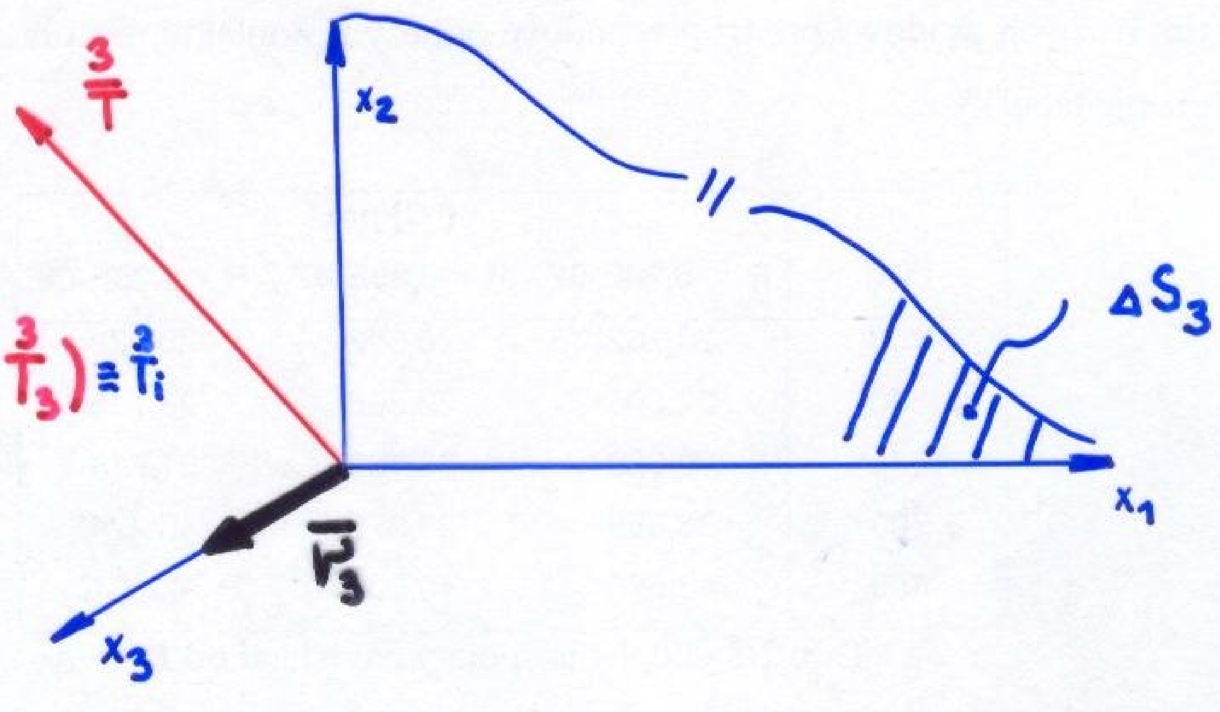
k = 2



$$\overset{2}{T} = (\overset{2}{T}_1, \overset{2}{T}_2, \overset{2}{T}_3) \equiv \overset{2}{T}_i$$

k = 3

$$\overset{3}{T} = (\overset{3}{T}_1, \overset{3}{T}_2, \overset{3}{T}_3) \equiv \overset{3}{T}_i$$



NÁZOV: T. N

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 7

ČÍSLO ZLOŽKY

Označme zložky tenzora napätia :

$$\overset{k}{T}_i = \tau_{ki} \quad \cancel{= \left(\overset{k}{T}_1 = \tau_{k1},\ \overset{k}{T}_2 = \tau_{k2},\ \overset{k}{T}_3 = \tau_{k3}\right)}$$

$\Rightarrow \quad k=1 : \quad \overset{1}{T}_i = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}) \qquad i=1,2,3$

$k=2 : \quad \overset{2}{T}_i = (\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23}) \qquad i=1,2,3$

$k=3 : \quad \overset{3}{T}_i = (\tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33}) \qquad i=1,2,3$

Zložky tenzora napätia:

$$(\tau_{ij}) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\overset{1}{T}_i]^T \\ [\overset{2}{T}_i]^T \\ [\overset{3}{T}_i]^T \end{bmatrix}$$

Vybrané tri navzajom kolmé roviny tvoria steny elementarného hranola !

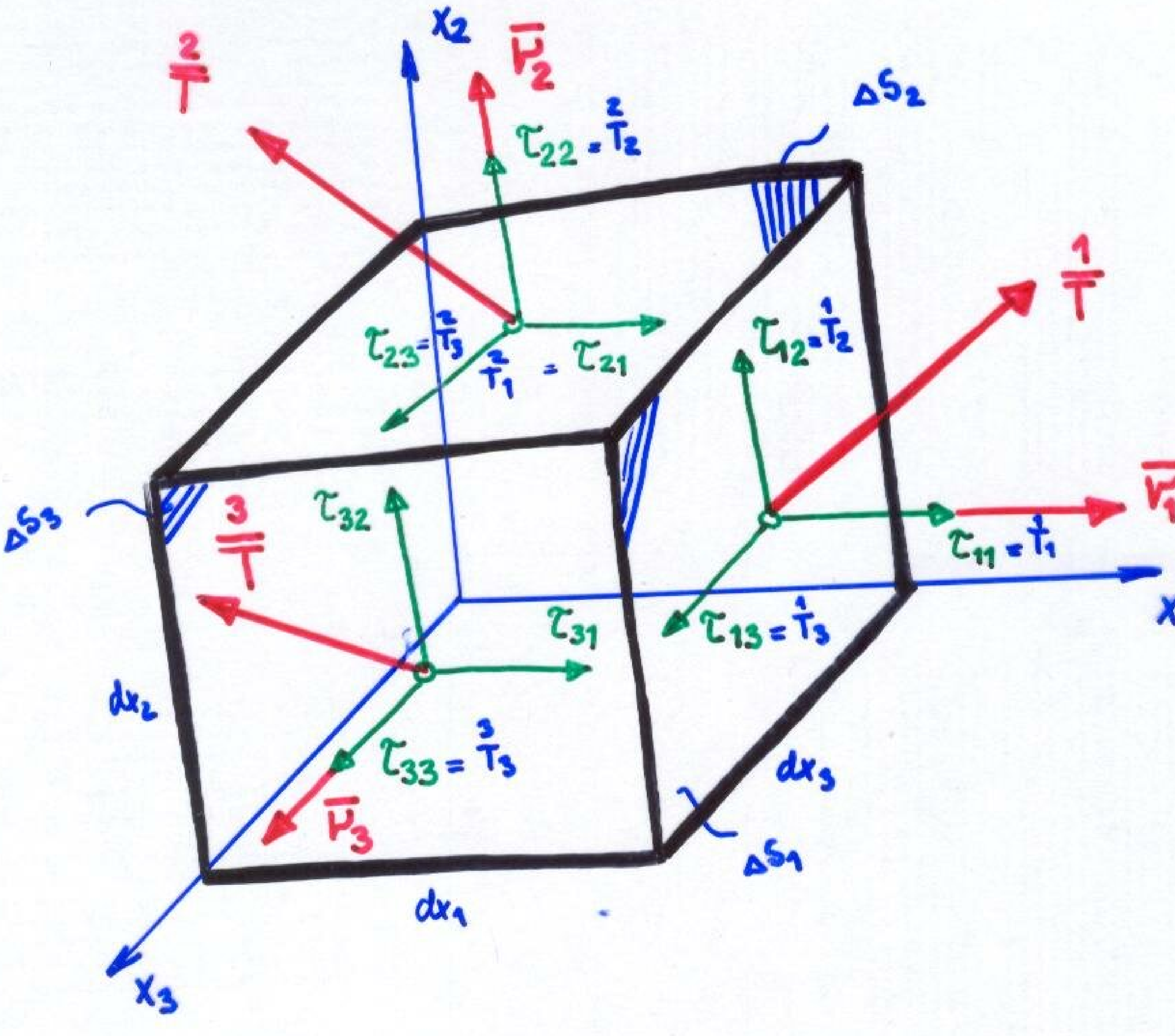
Zložky tenzora napätia sú zložkami troch vektorov napätia , ktoré pôsobia v stenách EH.

NÁZOV: T.N PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 8 ČÍSLO ZLOŽKY

Grafické znázornenie tenzora napätia v stenách EH :



$$\tau_{ij} \; ; \; \left.\begin{matrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{matrix}\right\} \text{9 zložiek tenzora napätia}$$

NÁZOV: T. N

PREDMET:

ROČNÍK: MK

ČÍSLO: 16

ČÍSLO ZLOŽKY

DÔKAZ TENZOROVÝCH VLASTNOSTI NAPÄTIA

Platí Cauchy - Eulerova formula:

$$\overset{\nu}{T}_i = \tau_{ji}\,\nu_j$$

Nech sú známe vektory $\overset{\nu}{T}_i$ a ν_j v pôvodnom KSS.

V natočenom SS bude platiť transformačný vztah:

$$\overset{\nu'}{T}_i{}' = \left[\tau_{ji}'\,\nu_j'\right] = a_{ik}\,\overset{\nu}{T}_k = \quad \overset{\nu}{T}_k = \tau_{\ell k}\,\nu_\ell \qquad \nu_\ell = a_{j\ell}\,\nu_j'$$

$$= a_{ik}\,\tau_{\ell k}\,\nu_\ell = a_{ik}\,\tau_{\ell k}\,\underbrace{a_{j\ell}\,\nu_j'}_{\nu_\ell} =$$

$$= \left[a_{ik}\,a_{j\ell}\,\tau_{\ell k}\,\nu_j'\right]$$

$\Rightarrow$

$$\tau_{ji}'\,\cancel{\nu_j'} = a_{ik}\,a_{j\ell}\,\tau_{\ell k}\,\cancel{\nu_j'} \qquad (\tau_{ji}' - a_{ik}\,a_{j\ell}\,\tau_{\ell k})\,\nu_j' = 0$$

$$\nu_j' \neq 0$$

$$\Rightarrow \tau_{ji}' = a_{j\ell}\,a_{ik}\,\tau_{\ell k} \quad \Rightarrow \text{transformačný zákon dyád}$$

$$\tau_{ij}' = a_{ik}\,a_{j\ell}\,\tau_{k\ell}$$

NÁZOV: T.P PREDMET: MK

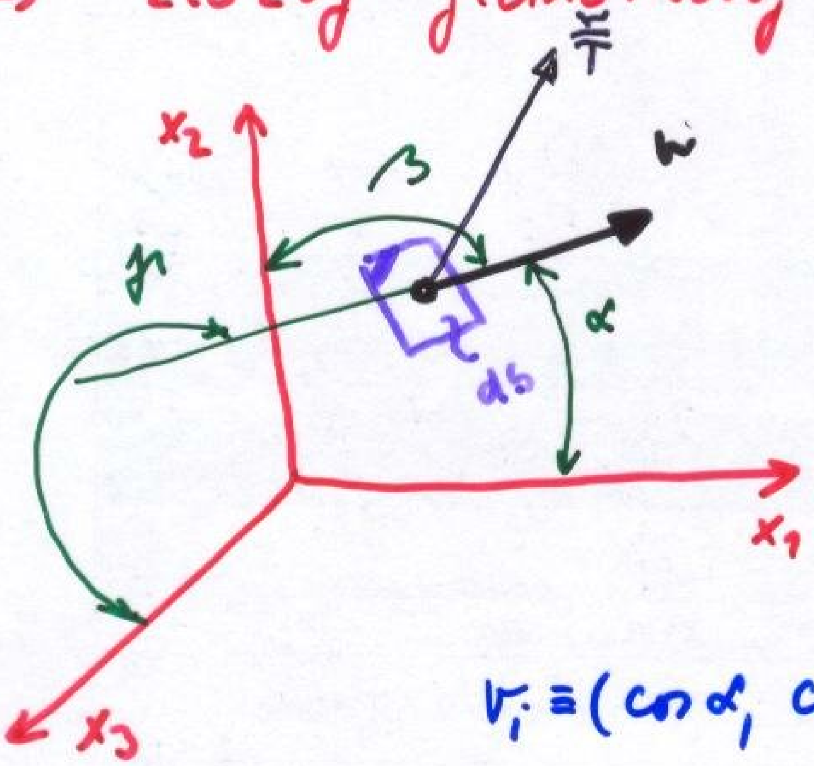
ROČNÍK:

ČÍSLO: 15 ČÍSLO ZLOŽKY

$$\Rightarrow \quad \underset{\downarrow\, i}{\overset{\nu}{T}_1} = \underbrace{\tau_{1\overset{i}{\uparrow}1}\,\nu_1}_{j} + \underbrace{\tau_{2\overset{i}{\uparrow}1}\,\nu_2}_{j} + \underbrace{\tau_{3\overset{i}{\uparrow}1}\,\nu_3}_{j}$$

$$\underline{\underline{\overset{\nu}{T}_i = \tau_{ji}\,\nu_j}} \qquad i = 1,3 \quad j = 1,3$$

$\nu_i \Rightarrow$ zložky jednotkovej normály:



$$\nu_i \equiv (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$\Rightarrow$ Keď poznáme zložky tenzora v stenách EH, vieme určiť vektor napätia v ľubovoľnej rovine, prechádzajúcej daným bodom!

NÁZOV: T.N PREDMET: MK

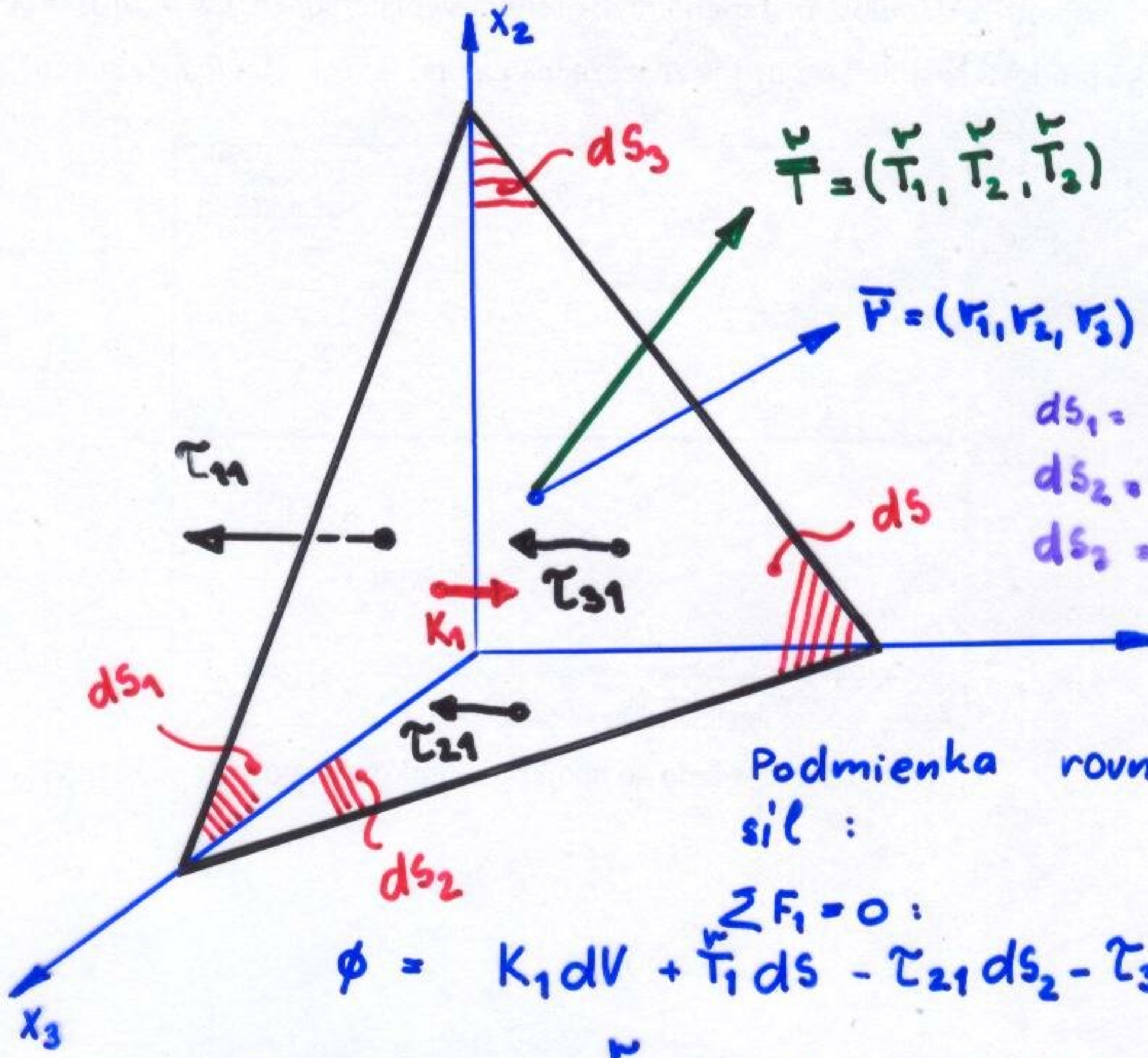
ROČNÍK:

ČÍSLO: 14 ČÍSLO ZLOŽKY

CAUCHY – EULEROVA FORMULA

Stanovuje vzájomný vzťah medzi zložkami vektora napätia a tenzora napätia.

<u>Úloha:</u> Dané je τ_{ij} → tenzor napätia v bode telesa.
Treba určiť vektor napätia v ľubovoľnej rovine – $\breve{T}_i$, prechádzajúcou daným bodom.



$dS_1 = \nu_1 dS$
$dS_2 = \nu_2 dS$
$dS_3 = \nu_3 dS$

Podmienka rovnováhy síl:

$\sum F_1 = 0$:

$$\phi = K_1 dV + \breve{T}_1 dS - \tau_{21} dS_2 - \tau_{31} dS_3 - \tau_{11} dS_1$$

Ak $dV \to 0 \Rightarrow \breve{T}_1 \cancel{dS} = \tau_{11} \cdot \nu_1 \cancel{dS} + \tau_{21} \cdot \nu_2 \cancel{dS} + \tau_{31} \cdot \nu_3 \cancel{dS}$

NÁZOV: TN

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 13

ČÍSLO ZLOŽKY

Ak $v_i = \emptyset \Rightarrow \dot{v}_i = \emptyset \Rightarrow$ Rovnice rovnováhy

$$\int_V K_i \, dV + \int_S \overset{\nu}{T}_i \, dS = \emptyset \qquad i = 1,2,3$$

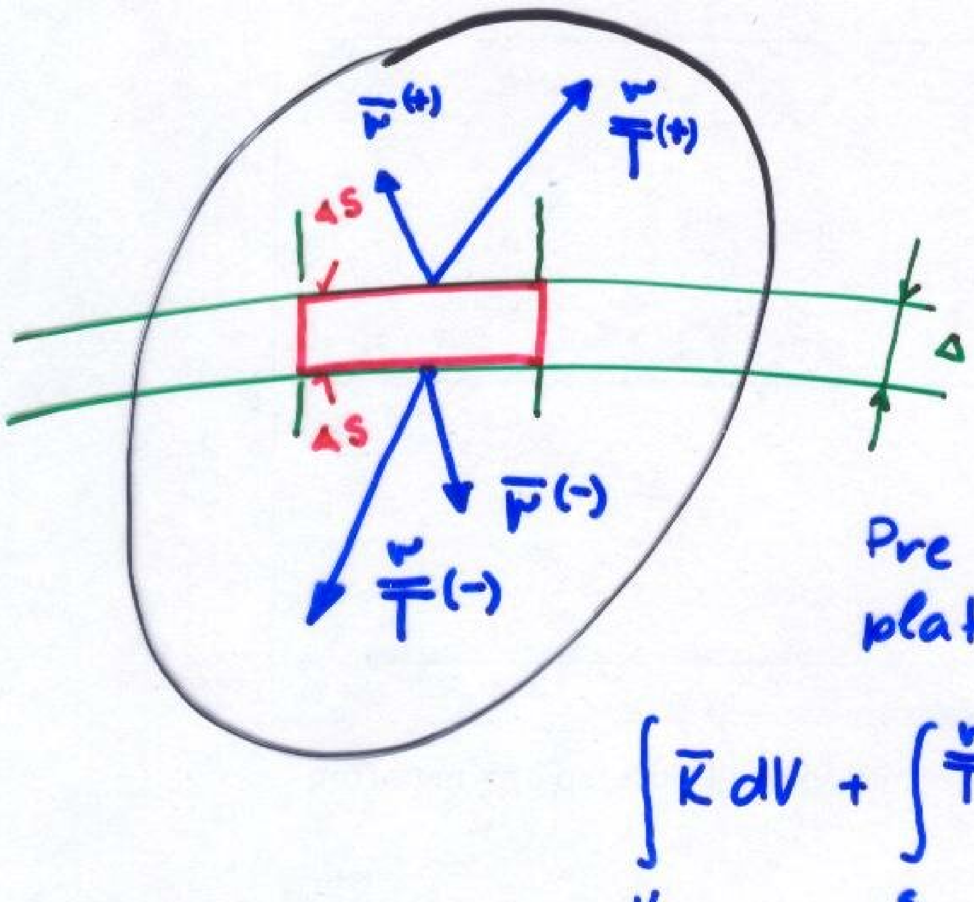
(silová) $\sum F_i = 0$!

$$\int_V e_{ijk} \, r_j K_k \, dV + \int_S e_{ijk} \, r_j \overset{\nu}{T}_k \, dS = \emptyset \qquad i = 1,2,3$$

(momentová) $\sum M_i = 0$!

(Statické podmienky rovnováhy)

DÔKAZ CAUCHY - Eulerovho princípu napätia:



Pre vybraný element platí 1. pohybová rovnica:

$$\int_V \bar{K} \, dV + \int_S \overset{\nu}{\bar{T}} \, dS = \int_V \dot{\bar{v}} \rho \, dV$$

Nech $\Delta \rightarrow 0$ $\quad \dot{v} = 0$ $\quad \Rightarrow dV \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \int_S \overset{\nu}{\bar{T}} \, dS = 0 \Rightarrow \overset{\nu}{\bar{T}}^{(+)} . \Delta S + \overset{\nu}{\bar{T}}^{(-)} . \Delta S = \emptyset$$

$$\overset{\nu}{\bar{T}}^{(+)} = - \overset{\nu}{\bar{T}}^{(-)}$$

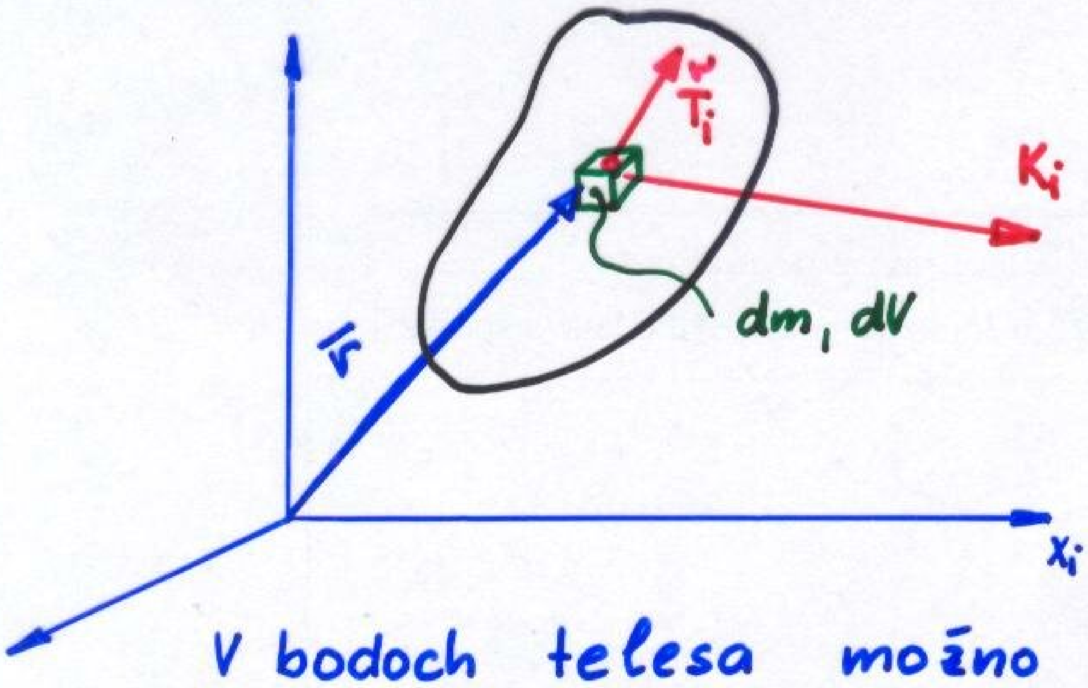
NÁZOV: T. N PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 12 ČÍSLO ZLOŽKY

Rozšírenie na kontinuum :

Čomu je rovné $\tilde{\mathcal{E}} = ?$



$$G_i = \int_V K_i \, dV$$

$$F_i = \int_S \tilde{T}_i \, dS$$

V bodoch telesa možno sčítať objemové a plošné sily :

$$\mathcal{E}_i = G_i + F_i = \int_V K_i \, dV + \int_S \tilde{T}_i \, dS$$

Moment síl :

$$M_i^{\mathcal{E}} = \int_V e_{ijk} \, r_j \, K_k \, dV + \int_S e_{ijk} \, r_j \, \tilde{T}_k \, dS$$

Potom :

1. pohybová rovnica :

$$\int_V K_i \, dV + \int_S \tilde{T}_i \, dS = \int_V \ddot{r}_i \, \rho \, dV \equiv \dot{H} \equiv \tilde{\mathcal{E}}$$

2. pohybová rovnica:

$$\int_V e_{ijk} \, r_j \, K_k \, dV + \int_S e_{ijk} \, r_j \, \tilde{T}_k \, dS = \int_V e_{ijk} \, r_j \, \ddot{r}_k \, dV \equiv \dot{\mathcal{H}} \equiv M_i^{\mathcal{E}}$$

NÁZOV: T. N

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 11

ČÍSLO ZLOŽKY

Časová zmena hybnosti a momentu hybnosti:

$$\dot{\bar{H}} = \int_V \dot{\bar{v}}\,\rho\, dV = \int_V \bar{a}\,\rho\, dV = \int_V \bar{a}\, dm = \bar{\mathcal{F}}$$

$$\dot{H}_i = \int_V \dot{v}_i\,\rho\, dV = \int_V a_i\,\rho\, dV = \mathcal{F}_i \qquad \left[kg\,\frac{m}{s^2} = 1N\right]$$

⇒ časová zmena hybnosti je rovná pôsobiacim silám na teleso

$$\dot{\bar{\mathcal{H}}} = \underbrace{\int_V \dot{\bar{r}} \times \bar{v}\,\rho\, dV}_{\emptyset} + \int_V \bar{r} \times \dot{\bar{v}}\,\rho\, dV = \int_V \bar{r} \times \bar{\mathcal{E}}\, dV = \bar{M}_{\mathcal{E}}$$

$$\dot{\mathcal{H}}_i = \int_V e_{ijk}\, r_j\, \mathcal{E}_k\, dV$$

⇒ časová zmena momentu hybnosti je rovná momentu síl pôsobiacich na teleso.

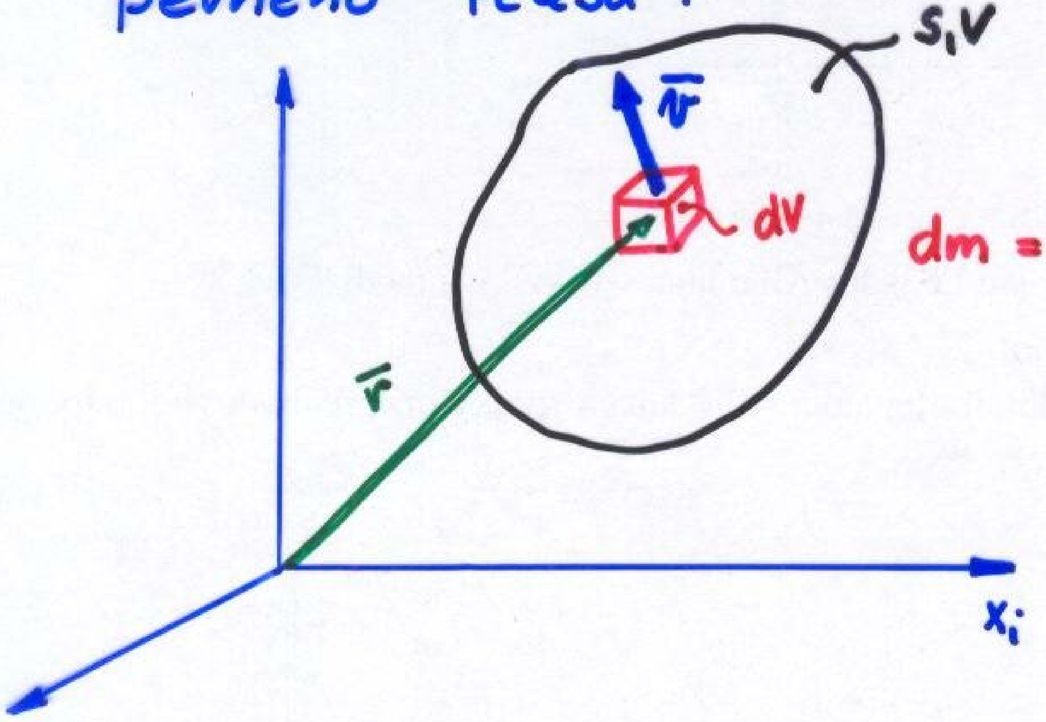
NÁZOV: T. N — PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 10 — ČÍSLO ZLOŽKY

POHYBOVÉ ROVNICE KONTINUA

Euler upravil Newtonové pohybové rovnice pevného telesa:



$$dm = \rho dV \quad [kg]$$

$\bar{v}$ – vektor rýchlosti pohybu hmotného bodu

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \mathring{\bar{r}}$$

Hybnosť hmotnosti dm:

$$d\bar{H} = \bar{v} . dm = \bar{v} . \rho dV \qquad \left[kg \frac{m}{s}\right]$$

Hybnosť celého telesa:

$$\bar{H} = \int_V \rho \bar{v} dV$$

$$H_i = \int_V \rho v_i dV \qquad i = 1,2,3$$

Moment hybnosti k počiatku SS:

$$d\bar{\mathcal{H}} = \bar{r} \times d\bar{H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\mathcal{H}} = \bar{r} \times \bar{H}$$

$$\bar{\mathcal{H}} = \int_V (\bar{r} \times \rho \bar{v}) dV$$

$$\mathcal{H}_i = \int_V e_{ijk} r_j v_k dV \qquad i = 1,2,3$$

NÁZOV: T. N   PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 9   ČÍSLO ZLOŽKY

OZNAČOVANIE TENZORA NAPÄTIA

(symbolicky)

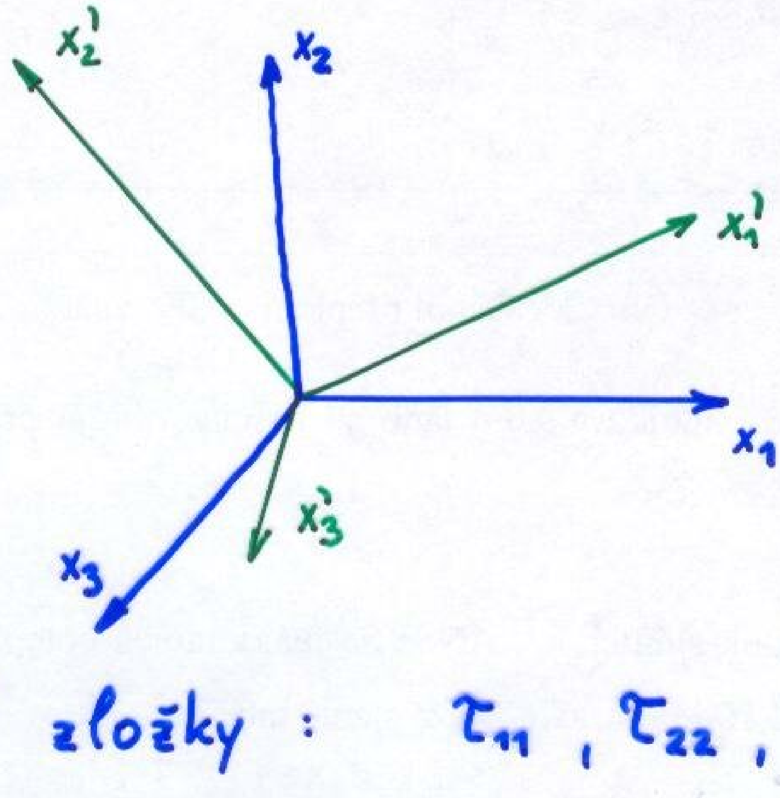
T , τ_{ij} $i,j = 1,3$ (analyticky)

$$(\tau_{ij}) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad \text{(matica)}$$

τ_{ij} - tenzor 2° (dyáda)

Neskôr ukážeme, že pre τ_{ij} platí transformačný zákon:

$$\tau'_{ij} = a_{ik}\, a_{jl}\, \tau_{kl}$$



Normálové zložky : τ_{11} , τ_{22} , τ_{33}

Tangenciálne zložky : $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{21}, \tau_{31}, \tau_{32}$

Rovnice rovnováhy v diferenciálnom tvare

① silová

$$\int_S \overset{v}{T}_i \, dS + \int_V K_i \, dV = 0$$

$$\int_S \tau_{ji} \nu_j \, dS + \int_V K_i \, dV = \int_V \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} dV + \int_V K_i \, dV = 0$$

$$\int_V \left(\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + K_i \right) dV = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + K_i = 0$$

---

momentová rovnica rovnováhy:

② $$\int_S e_{ijk} r_j \overset{v}{T}_k \, dS + \int_V e_{ijk} r_j K_k \, dV = 0$$

$$\int_S e_{ijk} r_j \tau_{lk} \nu_l \, dS + \int_V e_{ijk} r_j K_k \, dV = 0$$

$$e_{ijk} \int_V \frac{\partial}{\partial x_l} (r_j \tau_{lk}) \, dV + \int_V e_{ijk} r_j K_k \, dV = 0$$

$$\frac{\partial r_j}{\partial x_l} \equiv \frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \delta_{jl}$$

$$e_{ijk} \Big[\int_V \big(\underbrace{\delta_{jl} \tau_{lk}}_{\tau_{jk}} + \underbrace{r_j \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_l} \big) dV \Big] + \int_V e_{ijk} r_j K_k \, dV}_{\overset{!}{=} 0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e_{ijk} \int_V \tau_{jk} \, dV = 0$$

$$\Rightarrow \quad e_{ijk} \tau_{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

NÁZOV: T. N

PREDMET:

ROČNÍK: MK

ČÍSLO: 17

ČÍSLO ZLOŽKY

HLAVNÉ NAPÄTIA, HLAVNÉ SMERY, HLAVNÉ VEKTORY, INVARIANTY NAPÄTIA

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

symetrický tenzor

a) $\Rightarrow$ existujú tri hodnoty $\lambda^{(k)}$ – hlavné hodnoty $\Rightarrow$ Hlavné napätia:

$$(\tau_{ij} - \lambda \delta_{ij}) v_j = 0 \quad \text{- RVT}$$

$$\lambda^{(1)} = \sigma_1$$
$$\lambda^{(2)} = \sigma_2 \quad \Leftarrow \quad |\tau_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \quad \text{- CHR}$$
$$\lambda^{(3)} = \sigma_3$$

b) Existujú 3 hlavné smery a tri vektory

$\overset{1}{v}, \overset{2}{v}, \overset{3}{v}$

ktoré tvoria v danom bode HSS tenzora napätia

Zložky tenzora τ_{ij} v HSS sú hlavné napätia:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \phi & \phi \\ \phi & \sigma_2 & \phi \\ \phi & \phi & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

NÁZOV: T. N

ČÍSLO: 18

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO ZLOŽKY

c, Existujú tri invarianty napätia:

$$I_1 = \tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = sp\,T = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = J_1$$

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= \tfrac{1}{2}\left(\tau_{ii}\tau_{jj} - \tau_{ij}\tau_{ji}\right) = J_2 \\ I_3 &= e_{ijk}\,\tau_{i1}\,\tau_{j2}\,\tau_{k3} = J_3 \end{aligned}\right\} \text{skaláre}$$

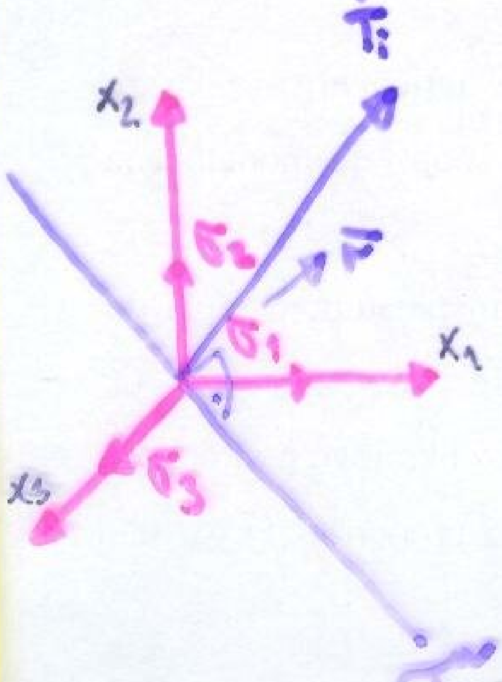
ELIPSOID NAPÄTIA :

Je grafickým znázornením napätosti v bode telesa.

Platí Cauchy - Eulerova formula:

$$\overset{\nu}{T}_i = \tau_{ji}\,\nu_j$$

V HSS platí:



$$\overset{\nu}{T}_1 = \tau_{11}\nu_1 + \overset{0}{\tau_{21}}\nu_2 + \overset{0}{\tau_{31}}\nu_3 = \sigma_1\nu_1 = \tau_{11}\nu_1$$

$$\Rightarrow \nu_1 = \frac{\overset{\nu}{T}_1}{\sigma_1}$$

$$\overset{\nu}{T}_2 = \sigma_2\nu_2 \Rightarrow \nu_2 = \frac{\overset{\nu}{T}_2}{\sigma_2}$$

$$\overset{\nu}{T}_3 = \sigma_3\nu_3 \Rightarrow \nu_3 = \frac{\overset{\nu}{T}_3}{\sigma_3}$$

σ – stopa roviny ρ

NÁZOV: T. N

PREDMET: MK

ROČNÍK:

ČÍSLO: 19

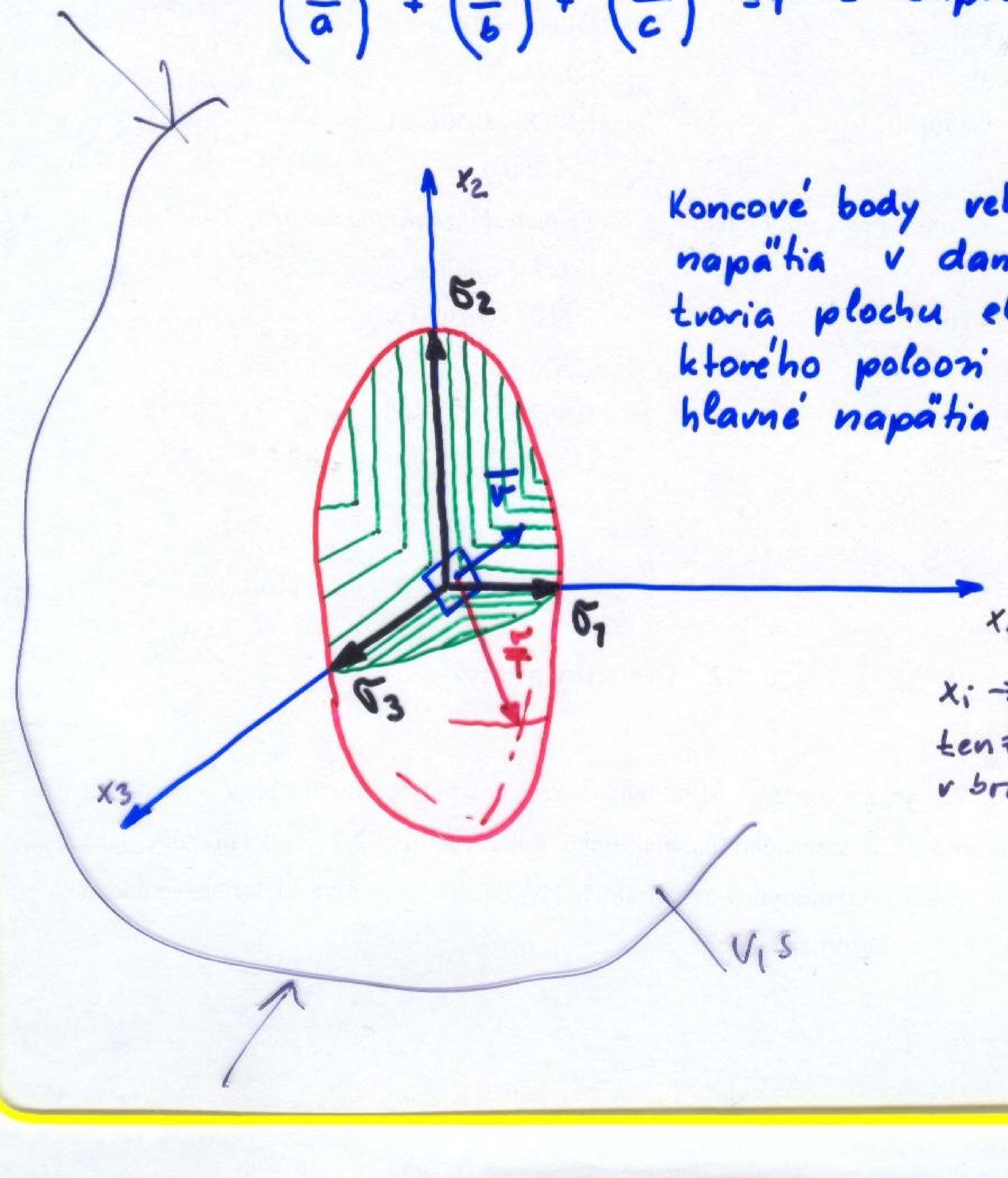
ČÍSLO ZLOŽKY

Platí:

$$(\nu_1)^2 + (\nu_2)^2 + (\nu_3)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\tilde{T}_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{T}_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{T}_3}{\sigma_3}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \quad - \text{ Elipsoid}$$



Koncové body vektorov napätia v danom bode tvoria plochu elipsoidu, ktorého poloosi tvoria hlavné napätia $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$x_i \rightarrow$ HSS tenzora napätia v bode telesa